Points extémaux d'un graphe de rectangles

par François-Xavier Vialard

École normale supérieure, Paris

RÉSUMÉ. *Démonstration combinatoire d'une propriété d'intégralité relative aux partitions d'un rectangle en rectangles.*

MOTS-CLÉS : *Graphe de rectangles, noeud, multiplicité, sommet,partition, entier, action de groupe.*

On présente dans cet article une démonstration combinatoitre de la proposition 1. Dans toute la suite, tous les rectangles considérés ont une aire strictement positive.

Proposition 1 *Soit un rectangle R et une partition de ce rectangle en un nombre fini de rectangles. Si on suppose que chaque rectangle de la partition a au moins un côté entier, alors le rectangle initial R a au moins un côté entier.*

Une preuve analytique de ce résultat est bien connue : il suffit de trouver une propriété *additive* caractérisant le fait pour un rectangle d'avoir un côté entier . Par exemple l'intégrale de la fonction $(x, y) \to \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ sur un rectangle quelconque est nulle si et seulement si un côté du rectangle est entier. Ainsi, si cette fonction est d'intégrale nulle sur chaque rectangle de la partition, il en est de même pour le rectangle initial, qui jouit donc de la même propriété.

Une autre approche, tout aussi naturelle consiste à "suivre le côté entier" pour aboutir à un autre sommet. Cette démarche nous permet d'obtenir une démonstration de la proposition 1 qui ne fait appel qu'à la notion de groupe opérant sur un ensemble.
Commençons par préciser le cadre dans lequel se détachera ce qui fait le coeur de la preuve.

Définition 1
-*Un* ***graphe géométrique de rectangles*** *est une union de rectangles d'intérieurs deux à deux*

disjoints dans $\mathbb{R}^2$.
-Un ***noeud du graphe*** *est un sommet d'un rectangle du graphe. La* multiplicité *d'un noeud est le nombre de rectangles dont il est le sommet.*
-Un ***sommet du graphe*** *est un noeud de multiplicité 1.*

Remarque 1 : Il est clair qu'un point quelconque de $\mathbb{R}^2$ est sommet d'au plus quatre rectangles. Dans le cas de la partition d'un rectangle les noeuds du graphe associé ont pour multiplicité 1,2 ou 4.

Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des rectangles d'un graphe de rectangles et $\mathcal{N}$ l'ensemble des noeuds du graphe. Soit $Z = \mathcal{N} \times \mathcal{R}$ et p_1, p_2 les projections :

$$p_1 : Z \to \mathcal{N}, \quad p_2 : Z \to \mathcal{R}.$$

Définition 2 *On appelle* ***fonction de déplacement*** *toute application f de l'ensemble Z dans lui-même, involutive et sans point fixe telle que* $p_2 \circ f = p_2$.

Remarque 2 : définir une fonction de déplacement revient à se donner pour chaque rectangle du graphe une permutation de ses sommets qui est le produit de deux transpositions à support disjoints.

Définition 3 *On appelle* ***fonction de transition*** *toute application involutive f de l'ensemble Z dans lui-même telle que* $p_1 \circ f = p_1$ *(l'application f conserze les noeuds du graphe).*

Remarque 3 : Dans la cas de la partition d'un rectangle en rectangles, les seuls noeuds du graphe associé de multiplicité impaire étant les sommets (il n'y a pas de noeud de multiplicité 3), il existe des fonctions de transition ayant la propriété :

$\forall z \in Z,\ f(z) = z$ si et seulement si $p_1(z)$ est un sommet du graphe. $\qquad (*)$

Pour tout s sommet du graphe, il existe un unique élement de $z \in Z$ tel que $p_1(z) = s$. Par abus de langage, nous appelerons sommet du graphe, tout élement $z \in Z$ tel que $p_1(z)$ est un sommet du graphe. Choisissons une fonction de déplacement δ et une fonction de transition τ vérifiant $(*)$ et étudions les orbites[1] des éléments de Z sous l'action du groupe G engendré par $\delta \circ \tau$ lorsque le graphe de rectangles est fini.

Proposition 2 *L'orbite sous l'action de G d'un sommet z du graphe contient deux points invariants par τ et deux seulement, à savoir z et un autre sommet a. De plus cette orbite est symétrique par rapport à chacun des points z et a.*

La proposition 1 est un corollaire de la proposition 2 puisqu'on peut, dans ce cas, définir une fonction de transition dont les points fixes sont les sommets du rectangle initial. On définit la

1. D'un point de vue heuristique, ces orbites peuvent être comparées aux trajectoires du billard dans le rectangle. Dans certains cas particuliers, les trajectoires sont "dégénérées", elles reviennent sur elles-mêmes. On s'intéresse dans ce qui suit à l'orbite d'un sommet du graphe, les orbites des sommets correspondant aux trajectoires dégénérées.

fonction de déplacement selon la remarque 2 en prenant pour chaque rectangle de la partition la permutation égale au produit de deux transpositions échangeant deux sommets sur les côtés parallèles de longueur entière (on choisit une direction si tous les côtés sont entiers).

Démonstration. $z \in Z$ étant un sommet du graphe, notons p le cardinal de l'orbite Gz de z. Sachant que $\tau(z) = z$, une récurrence immédiate montre que pour tout k entier naturel non nul, $(\delta \circ \tau)^k (z) = \delta \circ (\delta \circ \tau)^{k-1} (z)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ associons à $(\delta \circ \tau)^k (z)$ le couple $\left((\delta \circ \tau)^{k-1} (z), \delta \circ (\delta \circ \tau)^{k-1} (z)\right)$. Aux éléments deux à deux distincts de Gz écrits dans l'ordre $\left((\delta \circ \tau)(z), (\delta \circ \tau)^2 (z), \ldots, (\delta \circ \tau)^p (z) = z\right)$ correspond la liste :
$L = \left((z, \delta (z)), (\tau \circ \delta (z), \delta \circ \tau \circ \delta (z)), \ldots, \left((\tau \circ \delta)^{p-1} (z), \delta \circ (\tau \circ \delta)^{p-1} (z)\right)\right)$.
On obtient L à partir de z en appliquant $(p-1)$ fois de façon alternée δ et τ dans cet ordre puis une $p^{\text{ème}}$ fois δ. Les seconds termes des couples composant L forment la liste des éléments de Gz.
Remarquons que $\delta \circ (\tau \circ \delta)^{p-1} (z) = (\delta \circ \tau)^p (z) = z$. De plus δ et τ sont d'ordre 2. Lisant la liste L de droite à gauche, on applique donc à z de façon alternée δ et τ dans cet odre $(p-1)$ fois puis encore une fois δ. La liste ainsi formée est donc la même. Autrement dit, la liste L vue comme un mot est un palindrome. Notons σ l'inversion du sens de lecture d'un mot. L étant un mot de longueur paire, on peut écrire : $\delta \circ (\tau \circ \delta)^{p-1} (z) = (\delta \circ \tau)^p (z) = z$ où M_i, $i = 1, 2$ sont des mots non vides de même longueur. Alors :

$$L = (M_1, a, b, M_2) = \sigma (L) = (\sigma (M_2), b, a, \sigma (M_1))$$

d'où $a = b$. Soit $\tau(a) = a$, soit $\delta(a) = a$; comme δ n'a pas de point fixe, $\tau(a) = a$. Il en résulte que a est le second terme d'un couple formant L, donc M_2 étant non vide, a est un élément de Gz distinct de z.
Enfin, si $\alpha \in Gz \setminus \{z\}$, la liste L s'écrit sous la forme symétrique :

$$L = ((z, \delta (z)), \ldots (\delta (a), a) \mid (a, \delta (a)), \ldots, (\delta (z), z))$$

ce qui montre l'unicité de $a \in Gz \setminus \{z\}$ tel que $\tau(a) = a$ (p est pair et $a = (\delta \circ \tau)^{\frac{p}{2}} (z)$) et la symétrie de Gz par rapport à z et a. □

Remarque 4 : La preuve analytique de la proposition 1 s'étend au cas où la partition du rectangle est infinie. La démonstration que nous avons développée s'étend à ce cas en remarquant que dans un un rectangle dont on prend un sommet comme origine, il n'y a qu'un nombre fini de points à coordonnées entières. On en déduit que l'orbite d'un sommet est finie et le raisonnement présenté s'applique.

Quelques prolongements laissés en exercice :
Soit A l'ensemble des points fixes de τ et $N = \operatorname{card} A$. Le fait que N est pair est un corollaire immédiat de la proposition 2.
L'orbite Gz de $z \in Z$ sous l'action de G intersecte son image par τ si et seulement si Gz contient exactement deux points invariants par τ. Il y a $\dfrac{N}{2}$, trajectoires dégénérées.
Soit $\widetilde{\tau}$ telle que $\widetilde{\tau}_{|Z \setminus A} = \tau_{|Z \setminus A}$ et pour tout $z \in A$, $\widetilde{\tau} (z)$ est le second point de Gz invariant par τ. Alors $\widetilde{\tau}$ n'a aucun point fixe et les orbites associées à $\widetilde{\tau} \circ \delta$ sont "non dégénérées".
Enfin, dans le cas de la partition d'un rectangle en rectangles, si aucun noeud du graphe associé n'est de multiplicité 4, il est impossible de faire correspondre deux sommets du rectangle diagonalement opposés par l'action de G.