Université Paris-Dauphine
Département MIDO
Chargé de cours : F.-X. Vialard.
Chargés de TD/TP : G. Jankowiak, A. Frouvelle.
DUMI2E troisième année

Optimisation numérique
année 2013/2014

TD n°3 : Seconde partie

Une méthode variationnelle de défloutage et d'inpainting

On étudie ici un modèle variationnel simple de défloutage et d'inpainting. On présente tout d'abord l'idée mathématique pour s'intéresser ensuite à l'implémentation numérique dans une seconde partie. On introduit dans la troisième partie le floutage.

1. Présentation du problème et de la méthode

Le problème d'inpainting est le suivant : on se donne une image sur laquelle on a caché certains pixels et on souhaite proposer une reconstitution plausible de l'image. En termes plus mathématiques, c'est un problème d'interpolation.

Dans la suite on va alterner entre une représentation continue et discrète de l'image. Une image est la donnée d'une matrice de réels, chaque entrée de la matrice est un pixel de l'image. On supposera que l'image est en noir et blanc et la valeur prise par un pixel est alors un entier entre 0 et 255. Comme le nombre de pixels est très grand, un modèle de représentation continue de l'image est souvent utilisé : on suppose que l'image est une fonction définie sur le carré $[0,1]^2$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. On ne détaille pas dans ce TD comment passer du discret au continu et réciproquement.

Question 1 (Interpolation en dimension 1)**.** On considère le modèle correspondant en dimension 1 pour simplifier : on cherche à trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie $f(x_i) = y_i$ pour $x_1 < \ldots < x_n \in \mathbb{R}$ et $y_1, \ldots, y_n$ des n-uplets de points donnés. Montrer que la fonction linéaire par morceaux est l'unique minimiseur de

$$\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_n} f'(t)^2 \, dt \,, \tag{1}$$

sous les contraintes précédentes.

Question 2. On considère donc une fonction $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ connue sur un ensemble (mesurable) Ω (pas forcément connexe) de $[0,1]$. Proposer une extension directe du modèle précédent en dimension 2.

Question 3. Au lieu de résoudre le problème sous contraintes $f(x_i) = y_i$ pour $i \in 1, \ldots, n$, on va résoudre un problème approché : en dimension 1, la formulation du problème est

$$\frac{1}{2} \arg\min_f \int_{x_1}^{x_n} f'(t)^2 \, dt \; + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{k} \| f(x_i) - y_i \|^2 \, . \tag{2}$$

Proposer une formulation similaire en dimension 2.

Question 4. Calculer le gradient de l'équation (2) par rapport à f pour le cas de la dimension 2.

2. Cas discret

Question 5 (Formulation matricielle)**.** Pour implémenter le modèle sur les images (matrices de réels), on propose l'expression suivante dans le cas de l'inpainting seul (pas de floutage) :

$$\mathcal{J}(f) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} (f_{i+1,j} - f_{i,j})^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} (f_{i,j+1} - f_{i,j})^2 \right) + \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j} \frac{1}{n^2} m_{i,j} \, (y_{i,j} - f_{i,j})^2,$$

que l'on doit d'abord mettre sous la forme $\frac{1}{2}\langle f, A(f)\rangle + \langle b, f\rangle + c$, où $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(N^T M)$, et A est une application linéaire $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|_e$ la norme associée.

- Que représente la matrice $m_{i,j}$ par rapport à Ω ?
- Que vaut b dans ce cas ?
- Mettre le terme de gauche sous la forme $\|Df\|_e^2 + \|fD^T\|_e^2$, avec D une matrice à déterminer.
- Déterminer A.

Question 6. Discuter, selon les valeurs de m, de l'existence et de l'unicité des solutions au problème de minimisation.

Question 7. Que proposez-vous comme méthode d'optimisation pour minimiser $\mathcal{J}$?

3. Floutage

Pour compliquer le problème, au lieu d'observer la 'vraie' image/fonction f sur Ω, on observe (toujours sur Ω) $h \star f$ avec $\star$ l'opérateur de convolution et h une fonction $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ à support compact. On suppose donc la fonction h connue.

Question 8. Calculer le gradient par rapport à f de la fonction

$$E(f) = \frac{1}{2}\|\chi_\Omega(h \star f - y)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,. \tag{3}$$

On a noté $y \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ l'image observée sur Ω prolongée par 0 sur le complémentaire de Ω. On supposera que $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ pour assurer que $h \star f \in L^2$. Enfin, χ_Ω est la fonction indicatrice de l'ensemble Ω.

Question 9. Proposer une formulation variationnelle pour le problème de défloutage inpainting utilisant $E(f)$.

Devoir de vacances facultatif : Pour préparer le prochain TP, se renseigner sur la transformée de Fourier discrète.

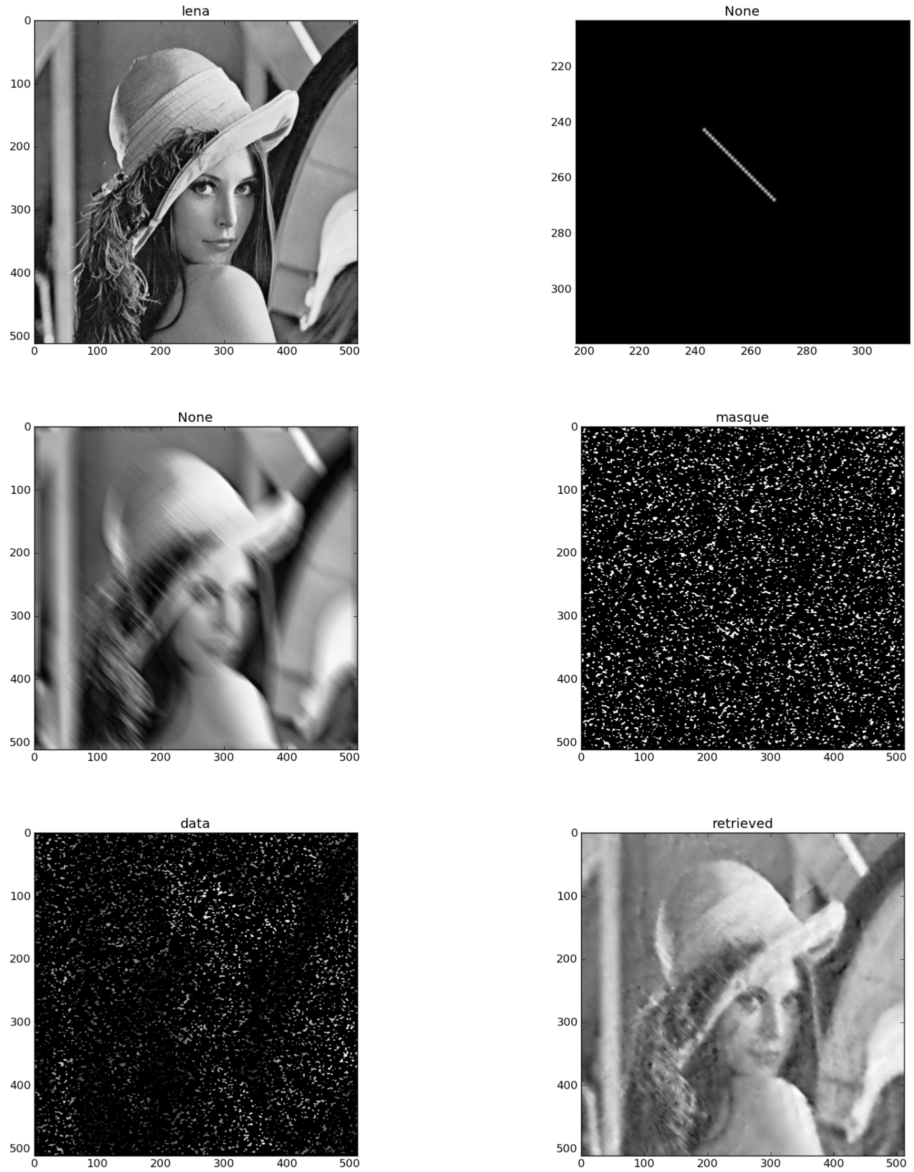

Figure 1 – De gauche à droite et de haut en bas, l'image initiale, le filtre, l'image floutée, le masque, la donnée (image floutée observée en dehors des pixels masqués). La dernière image est le résultat de l'optimisation.