Algèbre Linéaire 2

L'essentiel des démonstrations

François-Xavier Vialard
sur la base du document de cours de G. Carlier.

Ce document présente les démonstrations les plus importantes du cours et ne contient pas ou peu d'exemples qui doivent être traités en TD. Il est possible que des coquilles soient présentes dans le document. N'hésitez pas à me les signaler.

Table des matières

0.1 Notations

Soit A un ensemble fini, on notera $\#A$ le cardinal de A, c'est-à-dire le nombre d'éléments de A. Soit A, B deux ensembles, on notera $A \cap B$ l'intersection de A et B, c'est-à-dire l'ensemble $\{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$. On notera $A \cup B$ l'union de A et B, c'est-à-dire l'ensemble $\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

J'utilise les termes de **définition** et de **terminologie** dans ce cours. La frontière entre les deux peut sembler floue, à juste titre : on utilisera *terminologie* pour introduire des notations d'objets que l'on connait déjà et la notion de *définition* pour des objets mathématiques que l'on rencontre pour la première fois. Un exemple type est $\mathrm{Ker}(f)$ qui est une notation qui désigne $f^{-1}(\{0\})$, voir terminologie 5. En revanche, le polynôme caractéristique d'un endomorphisme doit être défini, voir définition 34.

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Notion d'espace vectoriel

Dans la suite, on notera $\mathbb{K}$ le corps des réels $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ le corps des complexes. Si A est un ensemble fini, on notera $\#A$ son cardinal.

Définition 1. *Un $\mathbb{K}-$espace vectoriel (ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) est la donnée d'un triplet $(E, +, \cdot)$ où*

- *E est un ensemble non vide contenant un élément noté 0_E,*
- *$+$ est dite loi de composition interne, c'est une application*

$$\begin{aligned} E \times E &\mapsto E \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

  vérifiant

  1. *$+$ est commutative, i.e. $\forall\, x, y \in E$, $x + y = y + x$,*
  2. *$+$ est associative, i.e. $\forall\, x, y, z \in E$, $x + (y + z) = (x + y) + z$,*
  3. *$\forall\, x \in E$, $x + 0_E = x$,*
  4. *$\forall\, x \in E$, $\exists\, y \in E$ noté $-x$ tel que $x + y = 0_E$ (on notera aussi $x + (-x) = 0_E$).*

- *$\cdot$ est dite loi de composition externe, c'est une application*

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\mapsto E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

  vérifiant $\forall\, x, y, z \in E$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

  1. *$1 \cdot x = x$*
  2. *$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$,*
  3. *$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$,*
  4. *$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \lambda \cdot x$.*

Terminologie 1.

1. *On appellera **vecteur** un élément de E et **scalaire** un élément de $\mathbb{K}$.*
2. *On omettra souvent de préciser les lois externes et internes et on dira donc simplement «soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel ».*
3. *De même, le signe de la loi de composition externe $\cdot$ sera omis la plupart du temps.*
4. *L'élément $-x$ est appelé opposé du vecteur x.*

5. *L'élément 0_E est appelé élément neutre (sous entendu pour la loi de composition interne) et s'il n'y a pas de confusion possible, il sera simplement noté 0.*

Proposition 1. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel alors on a : $\forall\, x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$*

1. *$-x$ est l'unique élément vérifiant $x + (-x) = 0_E$.*
2. *0_E est l'unique élément vérifiant $x + 0_E = x$.*
3. *$0 \cdot x = 0_E$,*
4. *$-1 \cdot x = -x$,*
5. *$\lambda \cdot 0_E = 0_E$.*

Preuve: Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Soit a un élément vérifiant $\forall\, x \in E$ $a + x = x$ alors $a + 0_E = 0_E$. Or 0_E vérifie aussi la propriété d'élément neutre donc $a + 0_E = a$ donc $a = 0_E$.
2. Soit $a \in E$ vérifiant $a + x = 0_E$ alors en additionant $(-x)$ de part et d'autre, on obtient $a + x + (-x) = -x$ et donc $a = -x$.
3. On a $(0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ par la propriété 4 de la loi externe. De plus, le terme entre parenthèses est nul donc $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. En additionnant l'opposé de $0 \cdot x$ à l'égalité obtenue, on a : $0 \cdot x = 0_E$.
4. On a $0_E = (1 + -1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x$. Le terme de gauche vaut x par la propriété 1 de la loi de composition externe. En additionnant (à gauche ou à droite, cela est égal par commutativité et associativité de la loi interne) l'opposé de x à l'équation, on obtient $-x = -1 \cdot x$ en utilisant la propriété délément neutre de 0_E.
5. $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$, par la propriété 2 de la loi externe et la propriété d'élément neutre de 0_E. On en déduit, en additionant à l'égalité obtenue $-\lambda \cdot 0_E$, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

$\square$

On a la proposition suivante dont la preuve est laissée en exercice.

Proposition 2. 1. *$\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.*

2. *Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des $\mathbb{K}-$espace vectoriel alors $E_1 \times \ldots \times E_n$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel pour les lois suivantes : soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n)$ et $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.*

Proposition 3. *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$. Si $\lambda \cdot x = 0_E$ alors $\lambda = 0$ ou $x = 0$.*

La réciproque de cette proposition est immédiate.

Preuve: Si $\lambda \neq 0$ alors on peut multiplier l'égalité $\lambda \cdot x = 0_E$ par $\frac{1}{\lambda}$. On obtient alors $1 \cdot x = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E$ et donc $x = 0_E$. $\square$

Exemple 1. *L'exemple le plus immédiat est $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 1$. On peut noter que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et donc $\mathbb{C}^n$ aussi. L'espace des fonctions continues $C([0,1], \mathbb{R})$ est un espace vectoriel (en exercice, on pourra détailler ce cas là).*

Exemple 2. *Soit A un ensemble et E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel alors l'ensemble des applications de A dans E est aussi un $\mathbb{K}-$espace vectoriel ce qui généralise l'exemple précédent $C([0,1], \mathbb{R})$.*

Exemple 3. *L'espace des polymômes $\mathbb{R}[X]$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et il en est de même pour l'espace des polynômes de degré majoré par n que l'on notera $\mathbb{R}_n[X]$.*

1.2 Notion de sous-espace vectoriel

Définition 2. *Un sous-espace vectoriel de E $\mathbb{K}-$espace vectoriel est un sous-ensemble F de E non vide vérifiant $\forall\, x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $x + \lambda \cdot y \in F$.*

Remarque 1. *La condition d'être non vide peut être remplacée par $0_E \in F$ car si F est non vide il contient au moins un élément x et en utilisant la seconde hypothèse, $x + -1 \cdot x = x + (-x) = 0$.*

Remarque 2. *Évidemment, un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est un espace vectoriel pour les lois de $+$ et $\cdot$ définies sur E, c'est-à-dire qu'il vérifie la définition 1. C'est immédiat car les opérations $+$ et $\cdot$ laissent stable F. Les conditions de la définition sont donc vérifiées car elles le sont dans E.*

Exercice 1. *Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$?*

Proposition 4. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E pour $n \geq 1$. Alors $\cap_{i=1}^n F_i$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.*

La preuve est laissée en exercice.

Remarque 3. *Le résultat est aussi vrai pour une intersection infinie de sous-espaces vectoriels de E. Attention, ce résultat n'est pas valable pour une union de sous-espaces vectoriels. Un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ est l'union de deux droites non confondues (et passant par l'origine).*

Terminologie 2. *On appelle $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ une combinaison linéaire de vecteurs.*

Définition 3. *Soit un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E et $A = (v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E (indexée par I non vide pouvant être fini ou infini). On note* $\mathrm{Vect}(A) = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \,|\, n \geq 1\,,\ v_i \in A \text{ et } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$.

Remarque 4. *On peut montrer que* $\mathrm{Vect}(A)$ *est le plus petit espace vectoriel contenant A.*

Proposition 5. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $A \subset B$ deux parties de E alors*

$$\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)\,.$$

Exercice 2. *Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.*

1.3 Familles libres et génératrices, bases

La motivation de cette partie est de définir des systèmes de coordonnées, c'est la notion de *base*. Lorsqu'on travaille sur $\mathbb{R}^2$, une base naturelle intervient qui s'appelle la base canonique. Cependant, cette base n'est pas forcément la plus adaptée pour étudier certains objet comme des applications linéaires. Dans ce paragraphe, on cherche donc à définir des systèmes de coordonnées en toute généralité.

Définition 4. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et L, G, B des familles de vecteurs de E.*

- *La famille G est dite génératrice si* $\mathrm{Vect}(G) = E$.
- *La famille L est dite libre si pour tout sous-ensemble fini de L noté $(x_1, \ldots, x_n)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a :*

$$\text{Si } \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i = 0 \text{ alors } \lambda_i = 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, n.$$

- *La partie B est dite base de E si elle est libre et génératrice.*

Remarque 5. *Dans le cas d'une famille finie* $L = (l_1, \ldots, l_n)$*, la propriété qui doit être testée s'écrit directement*

$$\text{Si } \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i = 0 \text{ alors } \lambda_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Exercice 3. *Montrer que toute famille* L *dans laquelle un même vecteur apparaît deux fois est une famille liée. Montrer que toute famille qui contient* 0 *est liée.*

L'intérêt de la notion de base est expliqué dans la proposition suivante :

Proposition 6. *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *et* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E *alors, quelque soit* $x \in E$*, il existe un unique* $n-$*uplet* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ *vérifiant*

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \, .$$

Les scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ *sont appelés coordonnées du vecteur* x*.*

Preuve: L'existence d'une telle famille vient du fait que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice. L'unicité vient du fait que cette famille est libre : si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ conviennent alors

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i \, ,$$

ce qui implique

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \beta_i) e_i = 0 \, ,$$

et donc $\lambda_i - \beta_i = 0$ par liberté de la famille. D'où l'unicité demandée. $\square$

Terminologie 3. *Si une famille de vecteurs est libre, on dit que les vecteurs sont linéairement indépendants. Sinon, on dit que la famille est liée ou linéairement dépendante.*

Exemple 4. *Dans* $\mathbb{R}^2$*, la famille* $\{(1,0), (0,1)\}$ *est libre. En effet, pour* $x, y \in \mathbb{R}$*, on a* $x(1,0) + y(0,1) = (x,y) = (0,0)$ *implique* $x = y = 0$*. Cette famille est évidemment génératrice donc c'est une base de* $\mathbb{R}^2$*.*

Proposition 7.
- *Une partie contenant une partie génératrice est génératrice.*
- *Une partie contenue dans une partie libre est libre.*
- *La partie* B *est une base* $\Leftrightarrow$ B *est libre maximale* $\Leftrightarrow$ B*est génératrice minimale.*
- *Si* L *est libre et* $x \notin L$ *alors* $L \cup \{x\}$ *est libre.*

Preuve: Montrons seulement le dernier point. Pour cela, on forme la combinaison linéaire $\alpha x + \sum_{i=1}^n \lambda_i l_i = 0$ avec $\alpha, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $l_i \in L$. Si $\alpha \neq 0$ alors $x = -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \lambda_i l_i$, *i.e.* $x \in \text{Vect}(L)$, ce qui est une contradiction. Donc, $\alpha = 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i l_i = 0$. Par liberté de la famille L, on a alors $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Remarque 6.
1. *La maximalité et la minimalité est à comprendre au sens de l'inclusion pour les ensembles.*
2. *La famille* $\{x\}$ *est liée si et seulement si* $x = 0$*.*
3. *Si* L *est une famille libre et* $x \in L$ *alors* $x \neq 0$*.*

Définition 5. *On dit que* E $\mathbb{K}-$*espace vectoriel est de dimension finie si il existe une partie génératrice de* E *de cardinal fini.*

Théorème 1 (**Théorème de la base incomplète**)**.** *Tout espace vectoriel admet une base et plus précisément si L, G sont respectivement des parties libres et génératrices de E alors il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset L \cup G$.*

Ce théorème est admis si E n'est pas de dimension finie.

Preuve: Montrons que l'on peut se ramener au cas où G est de cardinal fini. Comme E est de dimension finie alors il existe une partie génératrice de cardinal fini noté G'. Chaque élément $g \in G'$ peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire d'un **nombre fini** d'éléments de G. Pour un $g \in G'$ fixé, on note $F(g)$ la collection des vecteurs intervenant dans la combinaison linéaire pour décomposer g dans G. La partie $F = \cup_{g \in G'} F(g) \subset G$. Cette famille est donc finie, contenue dans G et est génératrice car $G' \subset \mathrm{Vect}(F)$.

On suppose dans la suite que G est finie. On propose l'algorithme suivant :

Initialisation de $B = L$ et $R = G$.
Tant que $(R \neq \emptyset)$ **faire**
  Choisir $x \in R$ et faire $R \leftarrow R \setminus \{x\}$.
  Si $(x \notin \mathrm{Vect}(B))$ **Alors**
    $B \leftarrow B \cup \{x\}$
  Fin Si
Fin
Retourner B

Algorithme 1: Algorithme du théorème de la base incomplète

Pour simplifier les notations, notons R_n et B_n les ensembles R et B de l'algorithme à la fin du n-ième passage dans la boucle principale. On convient de plus $B_0 = L$ et $R_0 = G$. Il est évident que $\#R_n = \#G - n$ tant que R_n est non vide. Donc l'algorithme termine au bout de $\#G$ étapes.

Montrons par récurrence que B_n est libre. La propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons la vraie au rang n, alors le dernier point de la propriété 7 montre que B_{n+1} est libre.

Enfin, quelque soit $y \in G$, il existe une itération k de l'algorithme pour laquelle $x = y$ et dans ce cas, $y \in \mathrm{Vect}(B_k)$. Comme $\mathrm{Vect}(B_n)$ est une suite croissante pour l'inclusion, on en déduit $G \subset \mathrm{Vect}(B_{\#G})$ donc $E = \mathrm{Vect}(G) \subset \mathrm{Vect}(B_{\#G})$: c'est à dire $B_{\#G}$ est génératrice.

Étant libre et génératrice, $B_{\#G}$ est une base. □

Proposition 8. *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et L, G deux parties telles que L est libre et G est génératrice, alors on a :*

$$\#L \leq \#G\,. \tag{1.1}$$

L'idée de la preuve est de remplacer progressivement des éléments de G par les éléments de L jusqu'à épuiser tous les éléments de L. On aura alors $L \subset G'$ avec $\#G' = \#G$ et donc le résultat.

Preuve: Si L est vide le résultat est trivial ainsi que si G est de cardinal infini. Si L est de cardinal infini et G de cardinal fini, on prend une famille extraite de L de cardinal k. Enumérons les éléments de L par $l_1, \ldots, l_k$ pour $k \geq 1$. On construit par récurrence R_n, G_n deux parties de E telle que $G_n = \{l_1, \ldots, l_n\} \cup R_n$, $\mathrm{Vect}(G_n) = E$ et $\#G_n = \#G$, ceci pour $n \leq k$. On pose aussi $G_0 = G$ et $R_0 = G$. Montrer l'hypothèse de récurrence au rang 1 se fait de la même manière que montrer l'hérédité de l'hypothèse, ce qu'on montre donc maintenant.

Comme G_n est génératrice, $l_{n+1} \in \mathrm{Vect}(G_n)$ donc on peut écrire

$$l_{n+1} = x + y \tag{1.2}$$

avec $x \in \mathrm{Vect}(\{l_1, \dots, l_n\})$ et $y \in \mathrm{Vect}(R_n)$. Par liberté de L, y est nécessairement non nul (et on remarque que de ce fait R_n est non vide). En écrivant $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ avec $g_i \in R_n$ deux à deux distincts, on obtient l'existence de i_0 tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$ (au moins un des coefficients est non nul dans la somme précédente). On pose alors $R_{n+1} = R_n \backslash \{g_{i_0}\}$. On a évidemment $\#R_{n+1} = \#R_n - 1$ et donc $\#G_{n+1} = \#G_n$. Pour terminer la preuve, il suffit de voir : $g_{i_0} \in \mathrm{Vect}(G_{n+1})$ car alors $E = \mathrm{Vect}(G_n) \subset \mathrm{Vect}(G_{n+1})$. On rappelle qu'on peut écrire

$$l_{n+1} = x + \lambda_{i_0} g_{i_0} + r\,,$$

avec $r \in R_{n-1}$ et $x \in \mathrm{Vect}(l_1, \dots, l_n)$ et $\lambda_{i_0} \neq 0$, donc

$$g_{i_0} = \frac{1}{\lambda_{i_0}} (l_{n+1} - x - r)\,.$$

On en déduit que le cardinal de toute famille finie et libre de l'espace est majoré par le cardinal de G. En particulier, il ne peut pas y avoir de famille libre de cardinal infini puisqu'on pourrait alors extraire une famille libre de cardinal strictement plus grand que le cardinal de G. □

Proposition 9. *Pour un espace vectoriel E de dimension finie (c'est à dire admettant une famille génératrice de cardinal fini), deux bases ont même cardinal.*

Preuve: Soient B_1 et B_2 deux bases de E, en considérant B_1 comme une famille libre et B_2 comme une famille génératrice, on obtient par application de la proposition 8, $\#B_1 \leq \#B_2$. En échangeant B_1 et B_2, on obtient le résultat. □

Définition 6. *La dimension d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E (de dimension finie) est le cardinal d'une base. On note cet entier* $\dim(E)$.

La dimension de l'espace vectoriel $\{0\}$ est 0. On rappelle encore une fois que si l'espace vectoriel n'admet pas de famille génératrice de cardinal fini (ou encore de base de cardinal fini) alors l'espace est dit de dimension infinie. On notera $\dim(E) = \infty$ pour pouvoir écrire des inégalités entre dimensions.

Proposition 10. *Soient F, G deux sous-espaces vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $F \subset G$, alors $F = G$ si et seulement si* $\dim(F) = \dim(G)$.

Preuve: L'assertion «$F = G$ implique $\dim(F) = \dim(G)$» est évidente. Démontrons l'autre implication par la contraposée. Supposons $F \subsetneq G$, alors il existe un élément x de G qui n'est pas dans F. Soit B une base de F, qui est donc une famille libre par définition. La proposition 7 implique que $B \cup \{x\}$ est libre et donc $\dim(G) \geq \dim(F) + 1 > \dim(F)$. □

Remarque 7. *Voici une preuve directe de la proposition précédente. Soit B une base de F. Par le théorème de la base incomplète, il existe une famille B' contenant B qui est une base de G. Or $\#B = \dim(F) = \dim(G) = \#B'$ et donc $B = B'$.*

Définition 7. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et A une partie de E. Le rang de A noté* $\mathrm{rg}(A)$ *est la dimension du sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(A)$*, autrement dit :*

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(A))\,.$$

Proposition 11. *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et A une partie de E. On a :*

1. $\mathrm{rg}(A) \leq \#A$.

2. $\mathrm{rg}(A) \leq \dim(E)$.

3. $\mathrm{rg}(A) = \#A \Leftrightarrow A$ *est libre.*

4. $\mathrm{rg}(A) = \dim(E) \Leftrightarrow A$ *est génératrice dans* E

Preuve: On prouve successivement chaque assertion.

1. A est une partie génératrice pour $\mathrm{Vect}(A)$ donc $\mathrm{rg}(A) \leq \#A$.
2. $\mathrm{Vect}(A) \subset E$ donc $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(A)) \leq \dim(E)$.
3. Si A est libre, alors A est une base pour $\mathrm{Vect}(A)$ car A est génératrice dans $\mathrm{Vect}(A)$. On a donc $\mathrm{rg}(A) = \#A$.

   Réciproquement, on suppose que $\mathrm{rg}(A) = \#A$. Par le théorème 1, on a l'existence de $A' \subset A$ base de $\mathrm{Vect}(A)$ telle que $\#A' = \mathrm{rg}(A) = \#A$. On en déduit donc que $A' = A$ et que A est libre.
4. On montre seulement le sens direct (la réciproque est la définition de famille génératrice) : soit B une base de $\mathrm{Vect}(A)$, alors par le théorème 1, il existe une famille A' telle que $B \subset A'$ telle que A' est une base de E. Comme $\mathrm{rg}(A) = \dim(E)$ alors $B = A'$ et $\mathrm{Vect}(B) = \mathrm{Vect}(A) = E$.

□

Comme corollaire immédiat de la proposition précédente, on a :

Proposition 12. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel alors on a : B est une base $\Leftrightarrow$ B est libre et $\#B = \dim(E)$ $\Leftrightarrow$ B est génératrice et $\#B = \dim(E)$.*

Remarque 8. *Pour montrer qu'une famille est une base dans un espace dont la dimension est finie et connue, il suffit donc de vérifier une des assertions de la proposition précédente. Attention, si la dimension de l'espace vectoriel n'est pas connue, il faut vérifier la liberté et le caractère générateur. Cela permet alors de déterminer la dimension.*

1.4 Somme directe de sous-espaces vectoriels

1.4.1 Cas de deux sous-espaces vectoriels

On répète qu'en général, si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel alors $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. En exercice, on peut montrer que c'est le cas si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$. Un exemple simple est le cas de $\mathbb{R}^2$ et de deux droites distinctes passant par l'origine.

Définition 8. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On note $F_1 + F_2$ le sous-espace vectoriel engendré par $F_1 \cup F_2$, autrement dit :*

$$F_1 + F_2 = \mathrm{Vect}(F_1 \cup F_2)\,.$$

Définition 9. *On dit que la somme $F_1 + F_2$ et on la note $F_1 \oplus F_2$ si la propriété suivante est satisfaite : $\forall\,(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ si $x_1 + x_2 = 0$ alors $x_1 = x_2 = 0$.*

Proposition 13. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E avec des bases respectives B_1 et B_2. Il y a équivalence entre :*

1. $F_1 \oplus F_2$.

2. $F_1 \cap F_2 = 0$.

3. $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ *et* $B_1 \cup B_2$ *base de* $F_1 + F_2$.

4. $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$.

Preuve:

1. Montrons $2 \Rightarrow 1$: Si $x_1 + x_2 = 0$ pour $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ alors $x_1 = -x_2$ et donc $x_1 \in F_1 \cap F_2 = \{0\}$ donc $x_1 = x_2 = 0$.
2. Montrons $1 \Rightarrow 3$: Tout d'abord $B_1 \cap B_2 \subset F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Or comme B_1 est libre, tout élément de B_1 et a fortiori de $B_1 \cap B_2$ est non nul. On a donc $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. La famille $B_1 \cup B_2$ est une génératrice dans $F_1 + F_2$. Montrons alors la liberté de cette famille en considérant des énumérations de $B_1 = (a_1, \dots, b_n)$ et de $B_2 = (b_1, \dots, b_m)$: soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ des scalaires tels que :
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i = 0\,.$$
Par hypothèse, on a alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i = 0$ et on conclut à la nullité des $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(\alpha_i)_{i=1,\dots,m}$ par liberté de B_1 et de B_2.
3. Montrons $3 \Rightarrow 4$: On obtient le résultat en utilisant l'égalité $\#(B_1 \cup B_2) = \#B_1 + \#B_2 - \#(B_1 \cap B_2)$.
4. Montrons $4 \Rightarrow 2$: Soit C une base de $F_1 \cap F_2$ (que l'on suppose non réduit à $\{0\}$) complétée en une base de F_1, elle est notée C_1. De même, on considère une base complétée de F_2 notée C_2. On a alors $C_1 \cup (C_2 \setminus C)$ est une famille génératrice de $F_1 + F_2$ de cardinal strictement plus petit que $\#B_1 + \#B_2 = \dim(F_1) + \dim(F_2)$.

□

Définition 10. *Soient un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires si $F_1 \oplus F_2 = E$. Autrement dit, F_1 et F_2 sont en somme directe et leur somme est égale à E.*

Si F_1 et F_2 sont supplémentaires, on a donc $\dim(F_1) + \dim(F_2) = \dim(E)$.

Proposition 14. *Soient un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, alors*
$$\forall\, x \in E \;\exists!\, (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \text{ tel que } x = x_1 + x_2\,.$$

Proposition 15. *Soient un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E et F_1 un sous-espace vectoriel de E, alors il existe F_2 un supplémentaire de F_1, i.e. $F_1 \oplus F_2 = E$.*

Cette proposition se prouve par application du théorème de la base incomplète 1.

Remarque 9.
- *Attention, supplémentaire est différent de complémentaire.*
- *Y a-t-il unicité du supplémentaire ?*

Proposition 16. *Soient un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E, on a :*
$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)\,.$$

Preuve: Si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ alors le résultat est déjà démontré dans la proposition 13. Sinon, on considère une base de $F_1 \cap F_2$ que l'on complète en une base de F_1 notée C_1 et en une base de F_2 notée C_2. On a alors $C_1 \cup (C_2 \setminus C)$ est une famille génératrice de E et de plus $\mathrm{Vect}(C_1) \cap \mathrm{Vect}(C_2 \setminus C) \subset \mathrm{Vect}(C_2 \setminus C) \cap (\mathrm{Vect}(C_1) \cap \mathrm{Vect}(C_2)) = \mathrm{Vect}(C_2 \setminus C) \cap \mathrm{Vect}(C) = \{0\}$. Par application de la proposition 13, $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \#(C_2 \setminus C) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$. □

1.4.2 Cas de plusieurs sous-espaces vectoriels

On souhaite étendre la définition de somme directe à $k \geq 2$ sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. Remarquons que dans le plan, 3 vecteurs forment toujours une famille liée même s'ils sont non colinéaires deux à deux. La propriété qui permet de généraliser la notion de somme directe est la propriété 2 de la proposition 13.

Définition 11. *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_k$ $k \geq 2$ sous-espace vectoriel de E. On dit que $F_1, \ldots, F_k$ sont en somme directe si $\forall\, x \in F_1 + \ldots + F_k$ il existe un unique $k-$uplet $(x_1, \ldots, x_k) \in F_1 \times \ldots \times F_k$ tel que $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$. De manière équivalente, si $\sum_{i=1}^{k} x_i = 0$ avec $x_i \in F_i$ alors $x_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, k$.*
On note alors $F_1 \oplus \ldots \oplus F_k$.

Remarque 10. *Cette définition contient une équivalence et mérite donc une preuve. On la laisse à l'étudiant.*

Proposition 17. *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_k$ $k \geq 2$ sous-espace vectoriel de E alors on a*
$F_1 \oplus \ldots \oplus F_{k+1}$ est équivalent à F_{k+1} et $F_1 \oplus \ldots \oplus F_k$ sont en somme directe.

Preuve: Pour le sens direct, on a : soient $x_{k+1} \in F_{k+1}$ et $x \in F_1 \oplus \ldots \oplus F_k$ tels que $x + x_{k+1} = 0$ alors en écrivant $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$ pour $x_i \in F_i$ on obtient : $\sum_{i=1}^{k+1} x_i = 0$ et donc $x_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, k+1$ puisque la somme est directe. Finalement, $x = x_{k+1} = 0$. Au passage, on voit aussi que la somme $F_1 + \ldots + F_k$ est directe.
La réciproque se prouve de la même manière, on aurait pu procéder par équivalences.
$\square$

Remarque 11. *On peut demander à l'étudiant de détailler la preuve précédente.*

Proposition 18. *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_k$ $k \geq 2$ sous-espace vectoriel de E avec des bases respectives $B_1, \ldots, B_n$. Il y a équivalence entre :*

1. *$F_1, \ldots, F_k$ sont en somme directe.*
2. *$\sum_{i=1}^{k} \dim(F_i) = \dim(F_1 + \ldots + F_k)$.*
3. *$\forall\, i \neq j$ $B_i \cap B_j = \emptyset$ et $\cup_{i=1}^{k} B_i$ est une base de $F_1 + \ldots + F_k$.*

On peut montrer la proposition précédente par récurrence sur k. Elle est vérifiée pour $k = 2$ par la proposition 13 et la proposition 17 permet de prouver l'hérédité de la propriété.

Chapitre 2

Applications linéaires

Ce chapitre présente les applications entre espaces vectoriels qui préservent la structure d'espace vectoriel. On les appelle donc naturellement des applications linéaires.

Définition 12. *Soient E et F des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Une application $f : E \mapsto F$ est appelée application linéaire si quelque soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$*

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) .$$

Terminologie 4.
- *Si f est une application linéaire bijective alors on dit que f est un isomorphisme de E sur F.*
- *Si $E = F$, on dit que f est un endomorphisme de E.*
- *On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*

Exemple 5.
- *L'application constante $f : E \mapsto F$ telle que $f(x) = 0_F$ est linéaire et est appelée application nulle.*
- *L'application $id_E : E \mapsto E$ définie par $id_E(x) = x$ est appelée application identité ou simplement l'identité. C'est un isomorphisme de E.*

Proposition 19 (Stabilité par opérations)**.** *Soient E, F et G des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, alors*
- *$L(E, F)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel*
- *si $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$ alors $g \circ f \in L(E, G)$*
- *si $f \in L(E, F)$ est bijective alors $f^{-1} \in L(F, E)$.*

Preuve: On laisse en exercice les deux premiers points. Le dernier peut se voir de la façon suivante : Soient $a, b \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors il existe $y, z \in F$ tels que $f(x) = a$ et $f(y) = b$. On a alors $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$ c'est à dire : $f^{-1}(a + \lambda b) = x + \lambda y = f^{-1}(a) + \lambda f^{-1}(b)$.

□

On s'intéresse maintenant aux premières propriétés qu'on peut obtenir sur les applications linéaire. Par exemple :

Proposition 20. *L'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée. L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel est aussi un sous-espace vectoriel.*

Preuve: La première assertion est laissée en exercice. On montre la seconde. On considère donc F et E deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f : E \mapsto F$ une application linéaire. Soit G un sous-espace vectoriel de F, on a $f^{-1}(G) = \{y \in E \,|\, f(x) \in G\}$. Soient $x, y \in f^{-1}(G)$ alors $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \in G$ car G est un sous-espace vectoriel et donc $x + \lambda y \in f^{-1}(G)$. □

Terminologie 5. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f : E \mapsto F$ une application linéaire. On note*

- $\mathrm{Im}(f) := f(E)$,
- $\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{0\})$.

Ils sont appelés respectivement image de f et noyau de f.

Proposition 21. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f : E \mapsto F$ une application linéaire alors f est une application injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. De plus, f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.*

Preuve: On laisse la seconde assertion à l'étudiant et on montre la première. Si f est injective alors $f^{-1}(\{0\})$ contient au plus un élément et $f(0) = 0$ car f est linéaire donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Réciproquement, soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$ alors $f(x - y) = 0$ et donc $x - y \in \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, c'est à dire $x = y$. Donc f est injective. $\square$

Proposition 22. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f : E \mapsto F$ une application linéaire alors si f est une application injective, l'image d'une famille libre est une famille libre et si f est surjective, l'image d'une famille génératrice dans E l'est dans F.*

Preuve: Soit $e_1, \ldots, e_n \in E$ une famille libre et $f : E \mapsto F$ une application linéaire injective. On suppose que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) = 0$ alors par linéarité $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = 0$ et par injectivité $(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$. Par liberté, on obtient $\lambda_i = 0$ quelque soit $i = 1, \ldots, n$.

On laisse à l'étudiant la démonstration du second point. $\square$

Remarque 12. *A priori, on ne suppose pas que la famille libre est de cardinal fini et la preuve ne traite que de ce cas là. Que rajouter à la preuve précédente pour la rendre tout à fait correcte ?*

Corollaire 1. *Si $e_1, \ldots, e_n$ est une famille génératrice de E alors $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.*

Preuve: Appliquer la proposition précédente à $f : E \mapsto \mathrm{Im}(f)$. $\square$

Corollaire 2. *Si $f : E \mapsto F$ est injective alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(F)$.*
Si $f : E \mapsto F$ est surjective alors $\dim(F) \leq \dim(E)$.
Si $f : E \mapsto F$ est un isomorphisme alors $\dim(F) = \dim(E)$.

Terminologie 6. *On appelera rang de f la dimension de l'image de f. On note cet entier $\mathrm{rg}(f)$. Autrement dit, on a*

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))\,.$$

2.1 Théorème du rang

On se place dans le cas où E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 2 (Théorème du rang). *Soit F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. On considère de plus $f : E \mapsto F$ une application linéaire. On a alors :*

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)\,. \tag{2.1}$$

Preuve: Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E. On a $G \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$. On a donc $\dim(G) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Montrons que $f_{|G} : G \mapsto \mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme.

En effet, soit $x \in \mathrm{Ker}(f_{|G})$ alors $x \in \mathrm{Ker}\, f$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap G = \{0\}$ et donc f est injective. D'autre part, $f_{|G}$ est surjective car si $z \in \mathrm{Im}(f)$ alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = z$. En décomposant x sur $G \oplus \mathrm{Ker}(f)$, on obtient : $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in G$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ et donc $f(x_1) = f(x) = z$ avec $x_1 \in G$. Donc $f_{|G}$ est surjective.

En appliquant le corollaire 2, on obtient $\dim(G) = \mathrm{rg}(f)$ et le résultat : $\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$. □

Proposition 23. *Soit F et E un deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de même dimension finie. On considère $f : E \mapsto F$ une application linéaire. On a alors*

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est un isomorphisme}.$$

Preuve: La preuve est laissée en exercice car conséquence immédiate du théorème du rang. □

2.2 Projections

Les applications linéaires les plus simples après celles mentionnées dans les exemples sont les projections.

Définition 13. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. On définit la projection p sur F parallèlement à G par quelque soit $x \in E$, $p(x) = x_F$ où x_F est tel que $x = x_F + x_G$.*

Remarque 13. *On rappelle que la décomposition de x en $x = x_F + x_G$ est unique car F et G sont supplémentaires dans E.*

Terminologie 7. *Les projections sont parfois appelées projecteurs.*

Proposition 24. *La projection introduite dans la définition 13 est linéaire.*

Preuve: La preuve est laissée en exercice. □

Proposition 25. *Un endomorphisme de E noté p est une projection si et seulement si $p \circ p = p$. De plus, on a alors : $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$ et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.*

Preuve: Supposons $p \circ p = p$. On a $x = x - p(x) + p(x)$ et comme $p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0$, on a $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. On a alors $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(p) = E$. Montrons qu'ils sont en somme directe : soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$ alors il existe $z \in E$ tel que $x = p(z)$ donc $p(x) = p \circ p(z) = p(z) = x$ or $x \in \mathrm{Ker}(p)$ donc $p(x) = 0$ et $x = 0$.
On a donc montré que p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
La réciproque est laissée en exercice. □

Définition 14. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On définit les applications coordonnées $e_i^* \in L(E, \mathbb{K})$ par $e_i^*(x) = \lambda_i$ avec λ_i la coordonnée de x sur e_i définie uniquement par l'égalité*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \,.$$

Remarque 14. *La coordonnée de x sur e_i n'est définie que relativement aux autres vecteurs de la base. Effectivement, si on change $\mathrm{Vect}(B \backslash \{e_i\})$ en changeant les vecteurs de la base, alors l'application coordonnée e_i change aussi.*

2.3 Dual d'un espace vectoriel

Terminologie 8. *Soit un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. Le dual de l'espace vectoriel E est $L(E,\mathbb{K})$ et est noté E^*. Les éléments de E^* sont appelés formes linéaires sur E.*

Définition 15. *Soient un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E, F un sous-espace vectoriel de E. On note $F^\perp$ le sous-espace vectoriel de E^* défini par*

$$F^\perp = \{w \in E^* \,|\, w(x) = 0 \;\forall\, x \in F\}\,.$$

Si G est un sous-espace vectoriel de E^* alors on note G^o le sous-espace de E défini par :

$$G^o = \{x \in E \,|\, w(x) = 0 \;\forall\, w \in G\}\,.$$

Proposition 26. *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*.*

Proposition 27. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E alors on a*

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)\,.$$

Définition 16. *Soit E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f \in L(E,F)$. On définit $f^* \in L(F^*, E^*)$ par :*

$$f^* : w \in F^* \to w \circ f \in E^*\,.$$

Proposition 28. *Soit $f \in L(E,F)$ avec E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie. On a*

1. $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^*)\,,$
2. $\mathrm{Im}(f)^\perp = \mathrm{Ker}(f^*)\,,$

Remarque 15. *D'autres propriétés similaires au second point de la proposition précédente sont vérifiées et elles peuvent se retrouver en utilisant la proposition suivante. Elles ne sont pas très importantes pour ce cours.*

Proposition 29. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. L'application*

$$\Phi : x \in E \mapsto (w \to w(x)) \in (E^*)^*$$

est un isomorphisme. On a alors $(f^*)^* \circ \Phi = f$ pour $f \in L(E,F)$ avec F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie

Preuve: L'application Φ est injective : soit $x \in E$ tel que $w(x) = 0$ quelque soit $w \in E^*$ alors, si x est non nul, il constitue le premier vecteur d'une base de E, notée $e_1, \ldots, e_n$. On a alors $e_1^*(e_1) = 1$. Donc, on a nécessairement $x = 0$. On conclut par l'égalité des dimensions.

On laisse l'étudiant chercher une preuve de la seconde assertion. □

Chapitre 3

Représentation matricielle associée à une application linéaire

Dans ce chapitre, on suppose que les $\mathbb{K}-$espaces vectoriels sont de dimension finie. On montre qu'une application linéaire peut être représentée par une matrice et réciproquement.

3.1 Applications linéaires en dimension finie

Proposition 30. *Soient E, F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie. Soit $e_1 \ldots, e_n$ une base de E et $v_1, \ldots, v_n$ une famille de vecteurs de F.*

*Il existe une **unique application linéaire** $f \in L(E, F)$ telle que $f(e_i) = v_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.*

Preuve: Montrons l'unicité : soient f et g deux telles applications, alors $(f-g)(e_i) = 0$ quelque soit $i = 1, \ldots, n$. On considére $x \in E$ qu'on écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Par linéarité, $(f-g)(x) = \sum_{i=1}^n x_i (f-g)(e_i) = 0$. Donc $f(x) = g(x)$ quelque soit $x \in E$.

L'existence d'une telle application peut se prouver en posant :

$$f = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) v_i \,.$$

Chaque e_i^* est linéaire donc f aussi comme somme d'applications linéaires. $\square$

Exemple 6. *Soit σ une permutation de $[1, n]$ (c'est à dire une application inversible de $[1, n]$ dans lui même) alors on peut définir p_σ l'application linéaire définie par $p_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.*

Corollaire 3. *La dimension de $L(E, F)$ est $\dim(E) \times \dim(F)$. Si $e_1 \ldots, e_n$ est une base de E et $f_1 \ldots, f_k$ est une base de F, alors*

$$A_{i,j} : x \in E \mapsto e_j^*(x) f_i \in F \text{ pour } j \in [1, n] \text{ et } i \in [1, k] \,.$$

est une base de $L(E, F)$.

Preuve: La dimension de $L(E, F)$ est le nombre d'éléments d'une base. La base donnée par l'énoncé contient $n \times k$ éléments. On va montrer que $A_{i,j}$ est une famille libre et génératrice dans $L(E, F)$. Elle est génératrice par application de la proposition précédente. Montrons la liberté. Soient $\lambda_{i,j} \in \mathbb{K}$ pour $i \in [1, k]$ et $j \in [1, n]$, tels que

$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j} A_{i,j} = 0_{L(E,F)} .$$

On a alors $\sum_j (\sum_i \lambda_{i,j} A_{i,j}) = 0_{L(E,F)}$ et comme $e_1^*, \ldots, e_n^*$ est la base duale de $e_1, \ldots, e_n$, on obtient $\sum_i \lambda_{i,j} f_i = 0_F$ quelque soit $j \in 1, \ldots, n$. Comme $f_1, \ldots, f_k$ est une base de F on a : $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, k$. □

3.2 Représentation matricielle

Définition 17. *Soit $f \in L(E, F)$, $B = (e_1 \ldots, e_n)$ est une base de E et $C = (f_1 \ldots, f_k)$ est une base de F. On note a_{ij} les coefficients de $f(e_j)$ dans la base C :*

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} f_i .$$

On appelle matrice représentant f dans les bases B et C la matrice $M_{CB}(f)$ donnée par

$$M_{CB}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & \ldots & . \\ . & \ldots & . \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Remarque 16.
1. *Lorsque $E = F$ et $B = C$, on notera $M_{BB}(f) = M_B(f)$ pour alléger l'écriture.*
2. *L'application nulle a une matrice de coefficients nuls dans n'importe quel base.*
3. *L'application id_E a une matrice dont les coefficients diagonaux valent 1 et les coefficients en dehors de la diagonale valent 0 en dehors, ceci dans n'importe quelle base $B = C$ de E. On note cette matrice $I_n \in M_n(\mathbb{R})$, appelée matrice identité (on la notera aussi Id.)*
4. *Attention, la notation en indice en mettant la base de l'espace de départ à droite et la base de l'espace d'arrivée à gauche n'est qu'une convention propre à ce cours. Il est possible de rencontrer l'ordre inversé ou une autre notation.*
5. *Si $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, on notera parfois $M(i, j)$ le coefficient i, j de la matrice M.*

Exercice 4. *Quel est la matrice d'une projection p dans une base de E constituée de l'union d'une base de $\mathrm{Im}(p)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(p)$.*

Exercice 5. *Soit $f \in L(E, F)$ avec B base de E et C base de F. Quelle est la matrice de $M_{B^*C^*} f^*$ en fonction de la matrice de $M_{CB}(f)$ (avec B^* base duale de B et de même pour C^*) ? Retrouver alors matriciellement $(f^*)^* = f$.*

Proposition 31. *Soient $f, g \in L(E, F)$ et C, B des bases respectives de E, F. On a*

$$M_{CB}(f + \lambda g) = M_{CB}(f) + \lambda M_{CB}(g) .$$

Proposition 32. *Soient E, F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finie (respectivement n et k). L'appplication $\Psi : L(E, F) \mapsto M_{k,n}(\mathbb{K})$ qui à $f \in L(E, F)$ associe sa matrice dans les bases B, C est un isomorphisme.*

Exercice 6. *Prouver les propositions précédentes.*

Remarque 17. *A toute matrice $A \in M_{k,n}(\mathbb{K})$, on peut donc associer une application linéaire dans $L(M_{n,1}(\mathbb{K}), M_{k,1}(\mathbb{K}))$. Par convention, on note cette application linéaire A même si cette notation ne souligne pas la différence entre l'objet matrice et son application linéaire associée.*

Définition 18. *Soient $n, p, l \in \mathbb{N}$. On définit le produit matriciel par l'application*

$$\begin{aligned} M_{n,p}(\mathbb{R}) \times M_{p,l} &\mapsto M_{n,l} \\ (A, B) &\mapsto A.B\,, \end{aligned}$$

avec

$$[A.B]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

où a_{ik} désigne le coefficient (i,k) de A et b_{kj} le coefficient (k,j) de B.

Proposition 33. *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de bases respectives B, C, D, soient de plus $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,G)$. On a alors,*

$$M_{DB}(g \circ f) = M_{DC}(g).M_{CB}(f)\,.$$

Preuve: La preuve est laissée en exercice (et a été faite en cours). □

Corollaire 4. *Soient E, F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de bases respectives B, C. Soit $f \in L(E,F)$ une application linéaire inversible, on a alors*

$$M_{BC}(f^{-1}) = (M_{CB}(f))^{-1}\,. \tag{3.2}$$

Preuve: Il suffit d'écrire que $f \circ f^{-1} = id_F$ et donc

$$M_{CB}(f).M_{BC}(f^{-1}) = I_n\,,$$

avec n la dimension de F. Ceci donne le résultat, par définition de la matrice $(M_{CB}(f))^{-1}$. □

Définition 19. *On définit le rang d'une matrice comme le rang de la famille composée de ses vecteurs colonnes. Autrement dit, si $A = [C_1, \ldots, C_n]$ avec C_i des vecteurs colonnes,*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \ldots, C_n)\,. \tag{3.3}$$

Proposition 34. *Soit $f \in L(E,F)$ et B, D des bases de (respectivement) E et F alors*

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M_{DB}(f))\,.$$

Preuve: Par définition, $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$, or la famille $C_1, \ldots, C_n$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ en utilisant l'isomorphisme $\mathbb{K}^n = F$ par le choix de la base D donc $\mathrm{rg}(C_1, \ldots, C_n) = \mathrm{rg}(f)$. □

Corollaire 5. *Une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ est inversible si ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$.*

Remarque 18. *Pour une notation plus précise, les vecteurs colonnes sont des matrices appartenant à $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Par défaut, on identifiera $M_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$.*

Corollaire 6. *Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. On a*

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM)\,,$$

où ${}^tM$ est la matrice transposée de M donnée par ${}^tM(i,j) = M(j,i)$.

Preuve: Ce corollaire s'obtient par application de la proposition précédente et de la proposition 28. □

3.2.1 Changement de base

Lorsqu'on travaille sur une application linéaire $f \in L(E, F)$ ou $f \in L(E)$, l'isomorphisme de la proposition 32 permet de travailler sur sa matrice une fois les bases de E et F choisies. Il est tout à fait naturel de choisir ces bases de telle manière à ce la matrice de f soit adaptée à l'étude que l'on veut faire.

On s'intéresse donc dans cette partie à l'effet d'un changement de base sur la matrice associée à l'application linéaire.

Définition 20 (Matrice de passage)**.** *Soient B et C deux bases d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie. On appelle matrice de passage P_{CB} de C à B la matrice de l'identité de E muni de la base B dans E muni de la base C, ce qui s'écrit*

$$P_{CB} = M_{CB}(id_E)\,. \tag{3.4}$$

Corollaire 7. *Sous les mêmes hypothèses que précédemment,*

$$P_{CB} = P_{BC}^{-1}\,. \tag{3.5}$$

Remarque 19. *Attention à la terminologie qui peut porter à confusion : La plupart du temps, on connait une nouvelle base B dans la base canonique C. On a donc P_{CB} qui est appelée matrice de passage de C à B. Cela signifie juste qu'on exprime les coordonnées des vecteurs de B dans la base C.*

Proposition 35. *Soit $x \in E$ et B, C deux bases de E. On a alors, en notant X_B les coordonnées de x dans la base B (et X_C pour la base C),*

$$X_B = P_{BC} X_C\,.$$

Remarque 20. *On peut lire la proposition précédente de la manière suivante : on obtient les coordonnées de x dans la nouvelle base en appliquant la matrice de passage P_{BC} de B à C. C'est à dire les coordonnées de la base canonique dans la nouvelle base B. Le point important est que cette matrice est l'inverse de la matrice donnée en pratique : P_{CB}. Il faut donc inverser le système $P_{CB}X_B = X_C$. Il n'est donc pas nécessaire d'inverser la matrice si on cherche simplement les coordonnées d'un seul vecteur. En revanche, si on doit effectuer la résolution plusieurs fois (plus que la dimension de l'espace), il faut inverser la matrice.*

On s'intéresse maintenant à l'effet d'un changement de bases sur une application linéaire $f \in L(E, F)$.

Proposition 36. *Soient deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels E et F, B, B' deux bases de E et C, C' deux bases de F. On a alors*

$$M_{C'B'}(f) = M_{C'C}(id_F) M_{CB}(f) M_{BB'}(id_E) = P_{C'C} M_{CB}(f) P_{BB'}\,. \tag{3.6}$$

Définition 21. *Deux matrices $M, N \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ sont dites équivalentes si il existe deux matrices inversibles $A \in M_n(R)$ et $B \in M_p(\mathbb{R})$ telles que*

$$N = BMA\,. \tag{3.7}$$

Proposition 37. *Toute matrice $M \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ de rang r est équivalente à la matrice $I_r \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par $I_r(i,i) = 1$ si $i \leq r$ et $I_r(i,j) = 0$ pour tout autre couple (i,j).*

Lorsque les espaces de départ et d'arrivée coïncident, il est imortant de considérer une seule base pour conserver la règle du produit matriciel pour la composition. Deux matrices différentes peuvent représenter le même endomorphisme exprimé dans deux bases différentes. La proposition 36 donne :

$$M_{B'}(f) = P_{B'B} M_B(f) P_{BB'} = P_{BB'}^{-1} M_B(f) P_{BB'}\,. \tag{3.8}$$

Définition 22. *Deux matrices $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables si il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que*

$$N = P^{-1}MP\,. \tag{3.9}$$

Si deux matrices sont semblables, alors elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Pour la similitude (fait d'être semblables) (3.9) la matrice de changement de base est donnée par P : les colonnes de P forment la base dans laquelle l'endomorphisme considéré a pour matrice N.

Proposition 38. *Pour $f, g \in L(E, F)$ on a :*

$$M_{B'}(f \circ g) = P_{BB'}^{-1} M_B(f \circ g) P_{BB'} = P_{BB'}^{-1} M_B(f) P_{BB'}\, P_{BB'}^{-1} M_B(g) P_{BB'}\,. \tag{3.10}$$

Définition 23. *La trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux.*

Proposition 39. *Si A et B sont deux matrices alors* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$*.*

Corollaire 8. *Si A et B sont deux matrices semblables alors* $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$*.*

3.2.2 Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Définition 24. *En utilisant les notations du corollaire 3, on définit les matrices élémentaires suivantes*

1. *transvections par $T_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha A_{ij}$,*
2. *dilatations par $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)A_{ii}$ pour $\lambda \neq 0$,*
3. *permutation par P_σ comme la matrice dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de l'application linéaire p_σ définie par $p_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ où σ est une transposition (c'est à dire simplement un échange de deux éléments de $[1, n]$).*

Remarque 21.
1. *Attention, parfois on définit la matrice de permutation comme étant la matrice identité dont les* lignes *ont été permutées par σ.*
2. *Les matrices de permutation sont définies pour n'importe quelle permutation mais seules les transpositions sont dites* matrice élémentaires.

Proposition 40.
1. *La multiplication à gauche par $T_{i,j}(\alpha)$ de la matrice M correspond à l'addition de lignes suivante $L_i \leftarrow L_i + \alpha\, L_j$ si L_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de M.*
   La multiplication à droite par $T_{i,j}(\alpha)$ de la matrice M correspond à $C_j \leftarrow C_j + \alpha\, C_i$ si C_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de M.
2. *La multiplication à gauche par $D_i(\lambda)$ de la matrice M correspond à la multiplication de la ligne i par λ.*
   La multiplication à droite par $D_i(\lambda)$ de la matrice M correspond à la multiplication de la colonne i par λ.
3. *La multiplication à gauche par P_σ (σ est une transposition) de M correspond à l'opération sur les lignes suivante : $L_i \leftarrow L_{\sigma(i)}$.*
   La multiplication à droite par P_σ (σ est une transposition) de M correspond à l'opération sur les colonnes suivante : $C_i \leftarrow C_{\sigma(i)}$.

Proposition 41. *Ces matrices élémentaires sont inversibles et donc la multiplication à droite ou à gauche d'une matrice M par une matrice élémentaire conserve le rang de M.*

Exercice 7. *Montrer que $P_\sigma^{-1} = {}^tP$ et que la multiplication à gauche par P_σ pour σ une permutation quelconque correspond à l'opération sur les lignes suivante : $L_i \leftarrow L_{\sigma^{-1}(i)}$. Cela reste cohérent avec la proposition précédente pour une transposition σ car $\sigma^{-1} = \sigma$.*

Preuve: L'inverse de $T_{i,j}(\alpha)$ est $T_{i,j}(-\alpha)$, l'inverse de $D_i(\lambda)$ est $D_i(\frac{1}{\lambda})$ et l'inverse de P_σ est $P_{\sigma^{-1}}$. $\square$

Voici une proposition démontrée en TD qu'il n'est pas nécessaire de connaître :

Théorème 3. *Soit $M \in M_n(R)$. Il existe une matrice de permutation P, une matrice triangulaire inférieure L telle que les coefficients diagonaux soient égaux à* 1 *et une matrice triangulaire supérieure U telle que*

$$M = PLU\,. \tag{3.11}$$

Chapitre 4

Déterminant

On généralise dans ce chapitre la notion de déterminant (supposé connu pour le cas de la dimension 2) au cas de n vecteurs dans $\mathbb{K}^n$.

Définition 25. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n et on considère*

$$f : \underbrace{E \times \ldots \times E}_{n\ fois} \mapsto \mathbb{K}\,.$$

1. *On dit que f est une forme $n-$linéraire si f est linéraire en chacune de ses variables.*
2. *On dit que f est une forme alternée si pour tout $i \neq j \in [1, \ldots, n]$ et $x_1, \ldots, x_n \in E$,*

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\,. \tag{4.1}$$

Lemme 1. *Soient E et f comme dans la définition précédente. Si on suppose que la seconde propriété* (4.1) *est vraie pour $i, j = i+1$ pour $i \in [1, n-1]$ alors f est alternée.*

Preuve: On doit montrer que la propriété (4.1) est vraie pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$. On montre ce résultat par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 2$. Notons $\sigma_{i,j} : E^n \mapsto E^n$ l'application qui à $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ associe $(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. C'est une application linéaire et la propriété (4.1) s'écrit :

$$f \circ \sigma_{i,j} = -f\,. \tag{4.2}$$

Avec l'égalité $\sigma_{1,2} \circ \sigma_{2,j} \circ \sigma_{1,2} = \sigma_{1,j}$ et par hypothèse de récurrence, on obtient :

$$f \circ \sigma_{1,j} = f \circ \sigma_{1,2} \circ \sigma_{2,j} \circ \sigma_{1,2} = -f\,, \tag{4.3}$$

et le résultat attendu pour $\sigma_{1,j}$. Comme la propriété (4.1) est vraie pour $\sigma_{i,j}$ pour $\min(i, j) \geq 2$, la propriété (4.1) est vraie pour tout $i \neq j$. □

Proposition 42. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n et f une forme $n-$linéraire alternée. Soit une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ pour laquelle il existe un couple (i, j) avec $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$, alors $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.*

Preuve: On applique la propriété d'alternance à $(x_1, \ldots, x_n)$

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\,, \tag{4.4}$$

ce qui donne le résultat. □

Proposition 43. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n et f une forme $n-$linéraire alternée. Alors, si la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$.*

Preuve: Comme la famille est liée, il existe i tel que $v_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j v_j$. On a donc :

$$f(v_1, \ldots, \ldots, \ldots, v_n) = \sum_{j \neq i} \alpha_j f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n)\,, \tag{4.5}$$

par $n-$linéarité du déterminant. Par la propriété précédente, chaque terme de la somme est nul, ce qui donne le résultat. □

Proposition 44. *L'espace vectoriel des formes $n-$linéaires alternées sur un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n est de dimension au plus 1.*

Preuve: On note $\mathcal{A}_n$ l'espace des formes $n-$linéaires alternées sur E muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$. On considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{A}_n &\mapsto \mathbb{K} \\ f &\mapsto f(e_1, \ldots, e_n)\,. \end{aligned}$$

On va montrer par récurrence que cette application est injective pour obtenir le résultat annoncé (pourquoi ?). Soit donc $f \in \mathcal{A}_n$ telle que $f(e_1, \ldots, e_n) = 0$ et $F = \mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$ de dimension $n-1$. On considère les applications $g_i : F^{n-1} \mapsto \mathbb{K}$ définies par :

$$g_i(v_1, \ldots, v_n) = f(e_i, v_1, \ldots, v_n)\,. \tag{4.6}$$

Par la proposition précédente, $g_i = 0$ pour $i \geq 2$ car $e_i \in F$. Par l'hypothèse de récurrence, g_1 est nulle. On obtient donc que $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$ pour $v_1 \in E$ et $v_i \in F$ pour $i \geq 2$.

Supposons maintenant que f soit non nulle alors il existe une famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E telle que $f(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$. Par la proposition précédente, la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base car libre et de cardinal n donc $e_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Quitte à échanger deux vecteurs, on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$, ce qui implique que $\mathrm{Vect}(v_1)$ est un supplémentaire de F. Soit p le projecteur sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(v_1)$. Par $n-$linéarité et la proposition précédente (attention, il faut le démontrer précisément), on a :

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = f(v_1, p(v_2), \ldots, p(v_n)) = 0\,, \tag{4.7}$$

ce qui contredit l'hypothèse $f(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$ et donc f est nulle. □

Remarque 22. *La propriété qui fait l'objet du raisonnement par récurrence n'est pas détaillée. Quelle est-elle ?*

Définition 26. *On définit la matrice extraite d'indices (i, j) notée A^*_{ij} la sous-matrice de A d'ordre $(n-1)$ obtenue en enlevant à A sa $i-$ème ligne et sa $j-$ème colonne.*

Définition 27. *On appelle déterminant l'application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par récurrence sur n par les relation suivantes :*

- *si $n = 1$, $\det(A) = a_{11}$.*
- *si $n > 1$, on pose $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A^*_{1j})$.*

Proposition 45. *L'application* det *est $n-$linéaire alternée et* $\det(I_n) = 1$.

Preuve: Preuve laissée en exercice. □

Dans la définition précédente, un choix a été fait d'utiliser la première ligne de la matrice mais la dernière ligne aurait aussi pu être utilisée. Plus généralement, on a :

Proposition 46 (Développement par rapport à une ligne)**.** *Le déterminant peut se calculer en développant par rapport à la $i-$ième ligne :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^*_{ij}) \,. \tag{4.8}$$

Preuve: Les formules données (4.8) donnent des formes $n-$linéaires alternées. Elles sont donc colinéaires au déterminant par la proposition 44. Le coefficient de proportionalité peut être évalué sur la matrice I_n et on conclut à l'égalité. □

Remarque 23. *Le fait que les formules précédentes donnent des formes $n-$linéaires est une application directe de la formule. Il faut faire attention en revanche pour démontrer que les formes définies sont alternées.*

Corollaire 9. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors*

$$\det(A) = \det({}^tA) \,.$$

Preuve: On remarque que

$$\det(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^*_{ij})$$

et on en déduit facilement le résultat en étudiant la même formule pour la transposée. □

Comme conséquence directe, on a :

Proposition 47 (Développement par rapport à une colonne)**.** *Le déterminant peut se calculer en développant par rapport à la $j-$ième colonne :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^*_{ij}) \,. \tag{4.9}$$

Remarque 24. *Les formules de développement par rapport aux colonnes et aux lignes sont à retenir car elles permettent de calculer le déterminant dans des cas pratiques.*

Théorème 4. *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, alors*

$$\det(A.B) = \det(A) \det(B) \,.$$

Preuve: Soit $\phi : M \mapsto \det(AM)$ alors ϕ est $n-$linéaire alternée (pourquoi ?) donc $\det(AM) = \lambda \det(M)$. Pour $M = I_n$, on obtient $\lambda = \det(A)$ donc $\det(AM) = \det(A)\det(M)$. □

Corollaire 10. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors*

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ inversible.}$$

Preuve: On écrit $\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1 = \det(A)\det(A^{-1})$. □

Proposition 48. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure alors*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \,. \tag{4.10}$$

Preuve: La propriété est vraie pour $n = 1$. On montre le résultat par récurrence en développant par rapport à la première colonne. $\square$

Définition 28. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$ et B une base de E. On définit le déterminant de l'endomorphisme f par* $\det(f) = \det(M_B(f))$.

Proposition 49. *La définition précédente ne dépend pas du choix de la base B.*

Preuve: Soit B' une autre base de E alors on a $M_{B'}(f) = P_{BB'}^{-1} M_B(f) P_{BB'}$. Par le théorème 4, on obtient

$$\begin{aligned}\det(M_{B'}(f)) &= \det(P_{BB'}^{-1}) \det(M_B(f)) \det(P_{BB'}) \\ &= \det(P_{BB'})^{-1} \det(M_B(f)) \det(P_{BB'}) = \det(M_B(f)) \,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

$\square$

Remarque 25. *On a choisi dans ce cours de ne pas parler de la formule explicite du déterminant faisant intervenir les permutations et leurs signatures. C'est un choix expliqué par les contraintes d'horaires et de prérequis du cursus L1 Mido. Cette formule peut être parfois utile mais la plupart du temps, on peut se contenter de la définition donnée dans ce cours et d'utiliser une preuve par récurrence pour démontrer la propriété voulue, même si cela est moins direct.*

Chapitre 5

Diagonalisation des matrices et des endomorphismes

5.1 Valeurs propres, vecteurs propres et espaces propres

Dans la suite, on considère E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $f \in L(E)$. Toutes les définitions ci-dessous s'étendent directement aux matrices en considérant l'application linéaire associée.

Définition 29 (valeur propre)**.** *Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si $f - \lambda id_E$ n'est pas injectif.*

Définition 30 (vecteur propre)**.** *Un vecteur $x \in E$ est un vecteur propre pour f associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = \lambda x$.*

Définition 31 (espace propre)**.** *L'espace propre (ou sous-espace propre) pour f associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ est $\mathrm{Ker}(f - \lambda id)$. On le note $V(\lambda)$.*

Une conséquence immédiate des définitions précédente est la proposition suivante :

Proposition 50. *Si λ est une valeur propre pour f alors $\dim(V(\lambda)) \geq 1$.*

En dimension finie, la non-injectivité equivaut à la non-surjectivité et aussi à la non-inversibilité. On a donc :

Proposition 51. *Si λ est une valeur propre pour f alors $\det(f - \lambda id) = 0$.*

Définition 32. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on écrit $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$. On note $P(f)$ l'endomorphisme défini par*

$$P(f) = \sum_{i=0}^{k} a_i f^i\,,$$

avec $f^i = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{i\ fois}$ pour $i \geq 1$ et $f^0 = id$.

Proposition 52. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et x un vecteur propre pour la valeur propre λ. On a alors*

$$P(f)(x) = P(\lambda)(x)\,.$$

Preuve: Par récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$, on a $f^n(x) = \lambda^n x$.
Par la définition précédente, on a :

$$P(f)(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i f^i(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i x = P(\lambda)x\,, \tag{5.1}$$

d'où le résultat. □

Proposition 53. *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ sont des valeurs propres distinctes de f alors les sous-espaces propres sont en somme directe :*

$$V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_k)\,.$$

Preuve: Soit $j \in [1,n]$ et $P_j(X) = \prod_{\substack{i\in[1,k]\\ i\neq j}} (X-\lambda_i)$. On a donc quelque soit $i \neq j$, $P_j(\lambda_i) = 0$ et $P_j(\lambda_j) = \prod_{\substack{i\in[1,k]\\ i\neq j}} (\lambda_j-\lambda_i) \neq 0$. Ce terme est différrent de 0 car les valeurs propres sont deux à deux distinctes.

Soit donc $x = \sum_{i=1}^k x_i = 0$ avec $x_i \in V(\lambda_i)$. On a alors par linéarité de $P(f)$ et avec la proposition précédente :

$$P_j(f)(x) = \sum_{i=0}^{k} P_j(f)(x_i) = \sum_{i=0}^{k} P_j(\lambda_i)x_i = P_j(\lambda_j)x_j \;= 0,. \tag{5.2}$$

Comme $P_j(\lambda_j) \neq 0$, on obtient $x_j = 0$ ceci pour j quelconque dans $[1,n]$, la somme des sous-espaces propres est donc directe. $\square$

Proposition 54. *Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie alors le nombre de valeurs propres distinctes est majoré par* $\dim(E)$*.*

Preuve: Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots$ une énumération des valeurs propres distinctes de f. Par la proposition précédente, les sous-espaces propres associés sont en somme directe et comme par définition $\dim(V(\lambda)) \geq 1$ pour λ valeur propre de f, on obtient :

$$k \leq \dim(V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_k)) \leq \dim(E)\,, \tag{5.3}$$

ce qui est le résultat demandé. $\square$

5.2 Diagonalisation

Définition 33. *On dit que f est diagonalisable si il existe une base de E formée de vecteurs propres pour f.*

L'intérêt de la diagonalisation (lorsqu'elle est permise) est de pouvoir faciliter les calculs. Voici un exemple d'application au calcul de puissance d'un endomorphisme ou d'une matrice.

Proposition 55. *Si f est diagonalisable et $B = (x_1, \ldots, x_n)$ une base de diagonalisation de f alors B est une base de vecteurs propres pour f^k. On a $f^k(x_i) = \lambda_i^k x_i$ avec λ_i la valeur propre associée à x_i.*

Preuve: La proposition se déduit immédiatement de la propriété $f^k(x_i) = \lambda_i^k x_i$ qui se montre immédiatement par récurrence. $\square$

Remarque 26. *Cette définition est valide en dimension infinie.*

Voici une condition suffisante (mais pas nécessaire) en dimension finie pour que f soit diagonalisable :

Proposition 56. *Si f admet* $\dim(E)$ *valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.*

Preuve: Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ une énumération des valeurs propres de f. On choisit un vecteur propres x_i associé à la valeur propre λ_i. D'après la proposition 53, les sous-espaces propres de f sont en somme directe donc $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E car une famille libre à n éléments. $\square$

5.3 Polynôme caractéristique

Dans cette partie, E est un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in L(E)$. On définit le polynôme caractéristique d'un endomorphisme. Comme précédemment, cette définition s'étend immédiatement aux matrices. On parlera donc aussi de polynôme caractéristique d'une matrice.

Définition 34. *Le polynôme caractéristique de f est noté χ_f donné par*

$$\chi_f(X) = \det(f - X\, id) \tag{5.4}$$

Par les résultats du chapitre précédent, on a immédiatement :

Proposition 57. *Si M est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ alors $\chi_M = \chi_{{}^tM}$*

Proposition 58. *Le polynôme caractéristique de f est de degré n. On peut l'écrire*

$$\chi_f(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(f) + \ldots + \det(f)\,.$$

Pour la preuve qui suit, on admet le résultat suivant (démontré en TD) : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, le degré de $\det(A + XB)$ est majoré par $\operatorname{rg}(B)$.

Preuve: Le résultat sur le coefficient constant est immédiat. On montre le résultat par récurrence sur n. Pour $n = 2$, on peut écrire la matrice M de l'application linéaire dans une base de E :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est par défintion :

$$\chi_f(X) = \det(M - Xid) = \begin{vmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{vmatrix} = (a - X)(b - X) - bc\,.$$

On obtient donc le résultat attendu : $\chi_f(X) = X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$.

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1$, on a alors en développant par rapport à la première ligne, on a, avec M la matrice de f :

$$\chi_f(X) = (a_{11} - X)\det(M_{11}^* - Xid_{11}^*) + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j}^* - Xid_{1j}^*)\,.$$

Par la propriété admise, le degré de $Q = \sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j}^* - Xid_{1j}^*)$ est majoré par $n - 2$ et par hypothèse de récurrence,

$$\det(M_{11}^* - Xid_{11}^*) = (-1)^{n-1}X^n + (-1)^{n-2}\operatorname{tr}(M_{11}) + \ldots + \det(M_{11})$$

on obtient donc le résultat attendu :

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= (a_{11} - X)((-1)^{n-1}X^n + (-1)^{n-2}\operatorname{tr}(M_{11}) + \ldots + \det(M_{11}) + Q \\ &= (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(M) + \ldots + \det(M)\,, \end{aligned} \tag{5.5}$$

car $\operatorname{tr}(M) = a_{11} + \operatorname{tr}(M_{11})$. □

Une proposition qui est un rappel de la partie précédente :

Proposition 59. *Si λ est une valeur propre de f alors λ est une racine de χ_f.*

5.4 Multiplicité algébrique et géométrique

Dans cette partie, on obtient une caractérisation importante de la diagonalisabilité.

Définition 35. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, $f \in L(E)$ et λ une valeur propre pour f.*

- *On appelle multiplicité algébrique de λ la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique de f. (C'est-à-dire le plus grand entier k tel que $(X-\lambda)^k$ divise $\chi_f(X)$).*
- *On appelle multiplicité géométrique de λ la dimension du sous-espace propre associé à λ $V(\lambda)$.*

Proposition 60. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, $f \in L(E)$ et λ une valeur propre pour f. La multiplicité géométrique de λ est inférieure ou égale à sa multiplicité algébrique. En particulier, si λ est racine simple de χ_f alors* $\dim(V(\lambda)) = 1$.

Preuve: Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de $V(\lambda)$ (donc $k = \dim(V(\lambda))$), que l'on complète en une base de E. On note cette base $B = (e_1, \ldots, e_n)$. On a alors

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda id_k & \star \\ 0 & M_{n-k} \end{pmatrix}$$

avec M_{n-k} une matrice de $M_{n-k}(\mathbb{K})$. On a alors (on peut démontrer ce résultat vu en TD par récurrence sur la dimension de l'espace)

$$\chi_f(X) = \det(\lambda id_k - X id_k)\chi_{M_{n-k}}(X) = (\lambda - X)^k \chi_{M_{n-k}}(X)\,,$$

ce qui montre le résultat attendu. □

Théorème 5 (CNS de diagonalisation)**.** *Soit $f \in L(E)$ avec E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. On a l'équivalence :*

f est diagonalisable $\iff$ le polynôme caractéristique de f est scindé et pour chaque racine, la multiplicité algébrique est égale à la multiplicité géométrique.

Preuve: Dans la suite, on note $n_i = \dim(V(\lambda_i))$ la multiplicité géométrique de la valeur propre λ_i et m_i sa multiplicité algébrique.

Si f est diagonalisable alors il existe une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres de f. On énumère le spectre de f par $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ de multiplicité géométrique $n_1, \ldots, n_k$ avec $n_i \geq 1$. Le polynôme caractéristique est le produit des éléments diagonaux de la matrice (diagonale) de $f - XId$ dans la base B soit $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - X)^{n_i}$. Donc le polynôme caractéristique de f est scindé et la multiplicité géométrique est égale à la multiplicité algébrique $n_i = m_i$ pour chaque racine λ_i de $\chi_f(X)$.

Réciproquement, pour montrer que f est diagonalisable, il suffit de voir que la somme de sous-espaces propres de f est de dimension n. Par hypothèse sur l'égalité des multiplicités et comme les sous-espaces propres sont en somme directe, on obtient :

$$\dim(V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_n)) = \sum_{i=1}^k n_i = \sum_{i=1}^k m_{\lambda_i}\,. \tag{5.6}$$

Comme le polynôme caractéristique est scindé, on a $\sum_{i=1}^k m_{\lambda_i} = \deg(\chi_f(X)) = n$, ce qui donne le résultat. □

Théorème 6 (Trigonalisation sur un $\mathbb{C}-$espace vectoriel)**.** *Soit $f \in L(E)$ avec E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie. Il existe une base de E dans laquelle $M_B(f)$ est une matrice triangulaire supérieure.*

Preuve: On montre le résultat par récurrence sur la dimension de E noté n. C'est trivialement vrai pour $n = 1$. On suppose la propriété vraie jusqu'au rang $n-1$ et on se donne E un espace vectoriel de dimension n. Le polynôme caractéristique de f admet une racine dans $\mathbb{C}$ et un vecteur propre associé noté e_1. On complète e_1 en une base de E notée $(e_1, \ldots, e_n)$ et on note p le projecteur sur $F = \text{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$. On applique l'hypothèse de récurrence à $p \circ f_{|F}$. Il existe donc une base notée $(f_2, \ldots, f_n)$ de F telle que la matrice de $p \circ f_{|F}$ est triangulaire supérieure. On en déduit immédiatement que la base $(e_1, f_2, \ldots, f_n)$ convient pour obtenir le résultat (s'en convaincre matriciellement). □

Théorème 7 (Cayley-Hamilton)**.** *Soit $f \in L(E)$ avec E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie. Le polynôme caractéristique de f annule f :*

$$\chi_f(f) = 0\,. \tag{5.7}$$

Preuve: On montre le résultat par récurrence sur n la dimension de E. Le résultat est vrai pour $n = 1$. On considère une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de trigonalisation de f. On a alors $M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda & \star & \ldots & \star \\ 0 & & M & \end{pmatrix}$. On a $\chi_f(X) = (\lambda - X)\chi_M(X)$ (résultat démontré en TD). On a $\chi_f(f)(e_1) = \chi_M(f)(f(e_1) - \lambda e_1) = 0$ et pour $i \geq 2$, on a : $\chi_M(f)(e_i) = \alpha_i e_1$ et donc $\chi_f(f)(e_i) = (f - \lambda id)(\alpha_i e_1) = 0$. On peut aussi s'en convaincre matriciellement. On obtient ainsi $\chi_f(f)$ est nul sur la base B et donc $\chi_f(f) = 0$. □

Remarque 27. *Le résultat du théorème montre aussi le résultat pour un $\mathbb{R}-$espace vectoriel car l'équation* (5.7) *peut se lire matriciellement et le résultat étant vrai pour une matrice complexe, il l'est aussi pour une matrice réelle.*

Annexe A

Retour sur les systèmes linéaires

Soit une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère le système

$$AX = b\,, \tag{A.1}$$

d'inconnue $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 61. *Si on connaît une solution X_0 du système* (A.1) *alors l'ensemble des solutions noté S est*

$$S = \{X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \mid X = X_0 + Y\,,\, Y \in \mathrm{Ker}(A)\}\,. \tag{A.2}$$

Remarque 28. *Attention, S n'est pas en général un sous-espace vectoriel de $M_{p,1}(\mathbb{R})$. On appelle ce type d'espaces **sous-espace affine**. C'est un sous-espace vectoriel si et seulement si $b = 0$. On parle alors de système homogène associé à l'équation* (A.1).

Proposition 62. *Si A est une matrice carré, c'est à dire si $p = n$, on a les équivalences suivantes :*

1. *A est inversible*
2. *Pour tout $b \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, l'équation* (A.1) *a exactement une solution.*
3. *Pour tout $b \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, l'équation* (A.1) *a au moins une solution.*
4. *Il existe $b \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que l'équation* (A.1) *a exactement solution.*

Preuve: Les deux premières assertions sont clairement équivalentes. La troisième assertion dit que A est surjective et comme $p = n$, A est inversible. La dernière assertion dit que S est un singleton pour un certain $b \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ *i.e.* $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ donc que A est injective et donc A inversible. □

Proposition 63. *La méthode de résolution du pivot de Gauss de l'équation* (A.1) *correspond à une suite de multiplications à gauche de la matrice A par des matrices élémentaires.*

On peut noter que effectuer un pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice A consiste à multiplier A à droite par des matrices élémentaires. Attention, dans ce cas, il faut agir sur les coordonnées de X mais pas de b. Opérer sur les colonnes permet par exemple de compléter une famille libre donnée dans la base canonique par des éléments de la base canonique. Voir exemples en TD.

Théorème 8. *Soit E, F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie, $f \in L(E, F)$ et $b \in F$. Pour l'équation linéaire $f(x) = b$, les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injective*
2. $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
3. *L'équation $f(x) = b$ a au plus une solution pour tout $b \in F$.*
4. *L'équation $f(x) = 0$ n'a que 0 comme solution.*